

FIA 2020/22

XII CONGRESSO/CONGRESO IBEROAMERICANO DE ACÚSTICA

XXIX ENCONTRO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE ACÚSTICA - SOBRAC

Florianópolis, SC, Brasil

Dipolos espacio-temporales para simulación eficiente de propagación acústica en el dominio del tiempo

Petrosino, J.^{1,2}; Lizaso, G.¹; Landini, L.¹

¹ DHyA, Universidad Nacional de Lanús, Remedios de Escalada, Buenos Aires, Argentina, glizaso@unla.edu.ar, landinilf@gmail.com

² DCyT, Universidad Nacional de Tres de Febrero, Caseros, Buenos Aires, Argentina, jpetrosino@untref.edu.ar

Resumen

El principio de Huygens-Fresnel propone reemplazar un determinado frente de ondas por una infinidad de fuentes puntuales con igual fase y frecuencia para generar el patrón de propagación original. Sin embargo, además del patrón buscado se presenta otro patrón que no se corresponde con lo esperado. Por ejemplo, si se utiliza un arreglo en línea el comportamiento de estas fuentes puntuales generará un frente que se propaga en la dirección deseada y una copia simétrica que se propaga en sentido opuesto (retro-propagación), debido a que cada fuente puntual emite en forma omnidireccional. Por otro lado, el patrón buscado solamente sería una representación exacta en algunas situaciones particulares. El problema más general tiene una descripción matemática precisa utilizando la integral de Kirchhoff, pero esta integral tiene solución para muy pocas situaciones particulares. David Miller propuso en 1991 reemplazar las fuentes puntuales por dipolos espacio-temporales que logran anular por completo la emisión retro-propagada. Recientemente, en 2021, Forrest Anderson presentó una propuesta diferente para solucionar el problema de la retro-propagación, lo que muestra que el interés en el tema sigue vigente. La solución hallada por Miller es adecuada para ser aplicada en simulaciones que utilicen el método de diferencias finitas o el método pseudoespectral en el dominio del tiempo. Sin embargo, no se han encontrado en el estado del arte propuestas que tomen ventaja de este tipo de fuentes en simulaciones de propagación de ondas. El presente trabajo describe la manera de implementar dichos dipolos espacio-temporales en simulaciones y presenta aplicaciones en las cuales la utilización de este tipo de fuentes significa una ventaja.

Palabras claves: principio de Huygens, teorema integral de Kirchhoff, método pseudo espectral (PSTD).

PACS: 43.20.Bi, 43.55.Ka, 43.60.Gk, 43.60.Tj.

Spatio-temporal dipole source for efficient time domain simulation of acoustic propagation

Abstract

The Huygens-Fresnel principle presents a determined wavefront as an infinite number of point sources with matching frequency and phase to produce the original propagation pattern. Although, besides the desired pattern there is an additional undesired pattern. For example, a linear array of point sources facing a direction will produce a wavefront propagating in the desired forward direction and a symmetrical copy facing backward (reverse wave), due to the omnidirectional intrinsic nature of point sources. On the other hand, the produced pattern is only an exact representation of the desired pattern under certain particular circumstances. The more general problem has a precise mathematical description using the Kirchhoff integral, but this integral can be solved under a very limited set of conditions. David Miller proposed in 1991 to replace the point sources for spatio-temporal dipole sources to completely suppress the backward propagation. Recently, in 2021, Forrest Anderson proposes a different approach to solve the retro-propagation problem, which shows still lasting interest in the subject. The solution found by Miller is useful for simulations based on the finite difference method and the pseudospectral time-domain method. However, the state of the art shows no precedent for approaches that take advantage of this kind of source for wave propagation simulations. This paper describes a way to implement said spatio-temporal dipole sources in simulations and showcases applications where this shows an advantage.

Keywords: Huygens' principle, Kirchhoff's integral theorem, pseudo-spectral method (PSTD).



1. INTRODUCCIÓN

El principio de Huygens-Fresnel resulta sumamente útil desde el punto de vista intuitivo y suele utilizarse para iniciar a los estudiantes en el comportamiento de los fenómenos ondulatorios. En 1678, Huygens sugirió que cada punto de un frente de ondas podía ser reemplazado por una fuente de onda esférica con igual frecuencia, fase y velocidad de propagación. La onda resultante de la superposición de todas las fuentes esféricas daría por resultado el mismo patrón de propagación original en cualquier momento posterior¹. Sin embargo, uno de sus inconvenientes es que si se mantiene en forma estricta la propuesta original, el frente de ondas correspondería al perfil de todos los puntos del espacio que se encuentran en un instante dado en idéntico estado de vibración, es decir que tienen la misma fase. En la práctica, el contorno del frente de ondas resulta complejo de determinar, excepto en casos geoméricamente sencillos (frentes planos, cilíndricos o esféricos). Un siglo más tarde, Fresnel realizó importantes contribuciones que permitieron explicar la difracción de la luz en base a este principio. Por otra parte, tanto Huygens como Fresnel ignoraron el problema de las ondas retrógradas². Cada fuente puntual genera ondas que se propagan de manera perpendicular al frente de ondas siguiendo su dirección de propagación, pero provocan simultáneamente ondas retrógradas que se propagan en sentido contrario.

Varias décadas después, Helmholtz propuso una solución para ondas escalares monocromáticas, y posteriormente Kirchhoff resolvió el caso más general. Esta solución se expresa mediante el teorema integral de Kirchhoff [3], del cual es posible obtener el principio de Huygens-Fresnel como una aproximación en determinadas situaciones particulares. Este teorema, se basa en las funciones de Green para deducir la solución

de la ecuación de onda homogénea en un punto arbitrario P en términos de los valores de la solución de la propia ecuación de onda y su derivada de primer orden en todos los puntos sobre una superficie arbitraria que encierra a P [4]. Su aplicación genera un patrón de propagación idéntico al original, pero tiene la dificultad de que dicha integral de superficie es muy difícil de calcular en la práctica, excepto para algunas situaciones simples. La solución de Kirchhoff de la ecuación de onda acústica es matemáticamente exacta, pero complicada a nivel computacional porque requiere el conocimiento simultáneo de la amplitud y del gradiente del campo en los contornos de la superficie [5].

Consideremos la Ecuación (1) correspondiente a la onda acústica donde ϕ es la presión instantánea, c es la velocidad de propagación y $g(\vec{r}, t)$ representa a las fuentes.

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -g(\vec{r}, t) \quad (1)$$

Supongamos ahora que se tiene un conjunto de fuentes reales contenido dentro de un determinado volumen V . Utilizando las mismas técnicas de la integral de Kirchhoff puede obtenerse la presión en cualquier punto $\vec{r}_1$ externo al volumen V mediante la Ecuación (2).

$$\phi(\vec{r}_1, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} \right] + [\phi] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{c \cdot r} \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \right\} ds \quad (2)$$

Donde $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_0|$ es la distancia entre $\vec{r}_1$ y cada $\vec{r}_0$ de la superficie S , y n es la distancia normal a S en dirección saliente del volumen V . Las expresiones entre corchetes se refieren a cantidades evaluadas en $t - r/c$. (Figura 1).

El campo $\phi(\vec{r}_1, t)$ obtenido coincide con el de las fuentes originales en el exterior del volumen V y es nulo en su interior. En resumen, en lugar de tener fuentes reales dentro de un volumen V que provocan un determinado patrón de propagación fuera de dicho volumen, es posible conseguir exactamente el mismo patrón de propagación con un conjunto apropiado de fuentes ubicadas en la superficie S .

¹Existe cierta confusión respecto de la validez del principio de Huygens, que lleva a dudar de su exactitud en forma general. Esto surge porque el principio fue pensado originalmente para fenómenos ópticos. Feynman [1] menciona que el principio es exacto para ondas mecánicas, aunque no lo es para ondas electromagnéticas.

²En rigor de verdad, Fresnel mostró cierta preocupación respecto de esta cuestión e incluso propuso un modo ad-hoc para solucionarlo, pero no fue desarrollado con precisión [2].

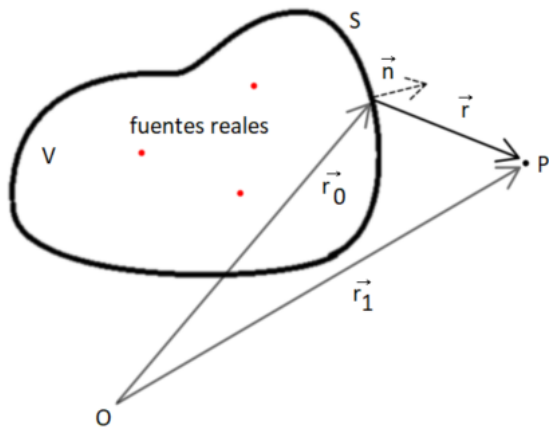


Figura 1: Determinación del campo en el punto P a partir de la integral de superficie, en reemplazo de las fuentes reales.

El primer término dentro de la integral de la Ecuación (2) — representa fuentes puntuales de propagación esférica, mientras que el segundo y tercer término representan dipolos orientados en forma perpendicular a la superficie S . Al involucrar estos dos tipos diferentes de fuentes de intensidad variable en cada punto de la superficie se pierde la simplicidad de la propuesta original de Huygens.

En 1991, Miller propuso una versión ligeramente diferente del principio de Huygens [6], que mantiene la esencia de la versión original, reemplazando las fuentes esféricas puntuales por dipolos espacio-temporales ubicados en forma normal a la superficie del frente de ondas.

Muy recientemente (2021) se publicó en *Scientific Reports* una propuesta diferente para corregir el principio de Huygens evitando la onda retropropagada. La idea de Anderson [7] es extraordinariamente simple. Sugiere considerar que la propia superficie conteniendo a las fuentes se desplaza con la velocidad de propagación de la onda que intenta representar, cancelando la retropropagación por efecto Doppler.

2. FUENTES DE MILLER

Los dipolos espacio-temporales propuestos por Miller cubren toda la superficie que encierra el volumen V ubicándose en orientación normal a S , colocando hacia el exterior de la superficie el elemento emisor del dipolo y en sentido opuesto un elemento de cancelación. El elemento emisor genera tanto la propagación anterógrada como la

retrograda. La onda retropropagada se desplaza hasta alcanzar el elemento de cancelación que emite una señal en contrafase con un retardo que cancela esta onda. Este elemento de cancelación tiene el mismo valor de amplitud que el emisor pero incluye una inversión de fase junto a un retardo temporal equivalente al tiempo que tarda la onda retrograda en recorrer la distancia entre elementos del dipolo.

Los dipolos espaciotemporales se comportan en concordancia con el planteo de Hetcht [2] sobre la necesidad de postular alguna clase de patrón de directividad para cada fuente puntual en el principio de Huygens para evitar la onda retropropagada. Hetcht define un patrón de directividad $K(\theta)$ para estas fuentes que denomina oblicuidad (*obliquity*), como se muestra en la Figura 2. Menciona que Fresnel reconoció en su momento la necesidad de alguna corrección de esta clase, aunque hizo poco más que conjeturar sobre sus características. Los dipolos de Miller dan lugar al patrón de directividad mencionado.

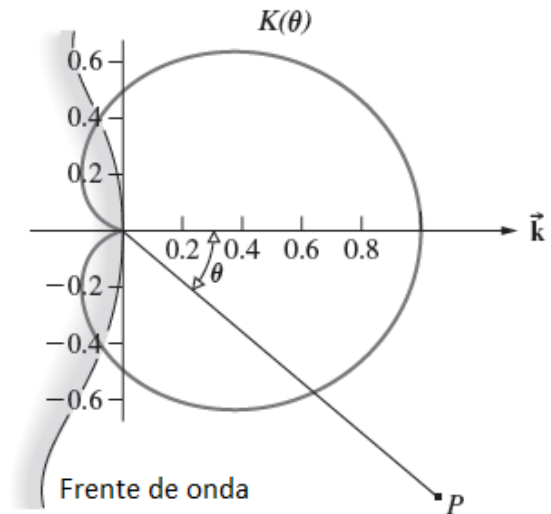


Figura 2: Factor de oblicuidad *obliquity* de fuentes sobre el frente de onda (adaptado de Hetch [2]).

3. SIMULACIONES NUMÉRICAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

3.1 Consideraciones generales

Los dipolos espaciotemporales de Miller pueden representarse de manera relativamente sencilla en simulaciones numéricas en el dominio del tiempo, teniendo en cuenta ciertos cuidados y restricciones. Las fuentes de Miller requieren



que la superficie S se corresponda con un frente de ondas. Una fuente plana implementada de esta manera genera ondas que se propagan solamente en una de las direcciones perpendiculares al plano, como se muestra en la Figura 3.

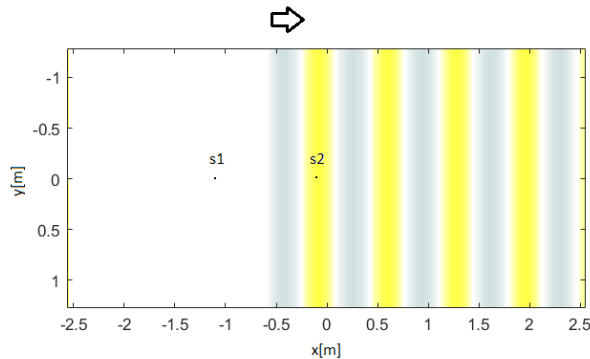


Figura 3: Onda plana unidireccional de Miller

El proceso requiere definir dos planos paralelos, uno para los elementos emisores del dipolo y el otro para los de cancelación. En el caso de simulaciones en 2D los planos están representados por rectas. Se puede elegir en forma arbitraria el tipo de señal a ser emitida, siempre y cuando respete los límites impuestos en el rango de frecuencia por el método de simulación utilizado. Resulta necesario generar la señal temporal de cancelación invirtiendo la fase de la señal original y agregando un retardo equivalente al tiempo de propagación que necesitan las ondas para recorrer la distancia entre elementos de cada dipolo. Los dipolos deben ubicarse en forma normal al plano, por lo tanto las posibles orientaciones de planos deben asegurar que para cada punto del plano emisor exista otro punto en dirección normal al plano que pertenezca a la grilla. Esto resulta muy sencillo con planos en orientación vertical u horizontal (paralelos a los ejes), donde simplemente puede elegirse una distancia entre dipolos que sea un múltiplo entero de la resolución espacial de la simulación. Sin embargo, es importante notar que no puede lograrse de modo sencillo con cualquier inclinación arbitraria de los planos. Para que la señal de cancelación pueda ser representada en la simulación en forma adecuada es necesario que el retardo sea un múltiplo entero de la resolución temporal de la simulación.

3.2 Método pseudo espectral del espacio k

El método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) genera errores por dispersión numérica espacial, dispersión numérica temporal y anisotropía [8]. Todos estos errores pueden minimizarse modificando en forma adecuada las resoluciones espacial y temporal, pero no pueden evitarse. El método pseudo espectral del espacio k (PSTD), en cambio, no posee dispersión numérica espacial ni anisotropía, y si bien tiene asociada la misma dispersión numérica temporal que FDTD esta puede ser compensada aplicando un factor de corrección [9] que minimiza el efecto de este error. En situaciones en las que la velocidad de propagación sea constante en el tiempo e igual en todos los puntos, la corrección es exacta. En el presente trabajo se utiliza el método PSTD y en particular el toolbox k -Wave para Matlab [10]. Se trata de un paquete de código abierto desarrollado para Matlab que permite realizar simulaciones en el dominio del tiempo sobre la propagación de ondas acústicas en 1D, 2D y 3D. Uno de los modos establecidos en el toolbox para definir los distintos parámetros que intervendrán en la simulación (densidad del medio, velocidad de propagación, ubicación de fuentes y de sensores, entre otros) es mediante matrices que tienen la misma dimensión que la grilla de base ($kgrid$). De esta manera se dispondrá de una grilla que especificará cuestiones generales como el tamaño del espacio de simulación y su resolución, otra representará la ubicación de las fuentes, una tercera indicará la ubicación de los sensores que registrarán variables en función del tiempo, a lo que podrán agregarse grillas que especifiquen la densidad del medio en cada punto. La Figura 4 muestra un esquema de esta estructura de funcionamiento.

La condición de Courant–Friedrichs–Lewy establece que el coeficiente CFL que se presenta en la Ecuación 3 sea menor que la unidad para asegurar la estabilidad de la solución. Este coeficiente relaciona la resolución espacial, la temporal y la velocidad de propagación.

$$CFL = \frac{c \cdot dt}{dx} = \frac{c}{dx/dt} \quad (3)$$

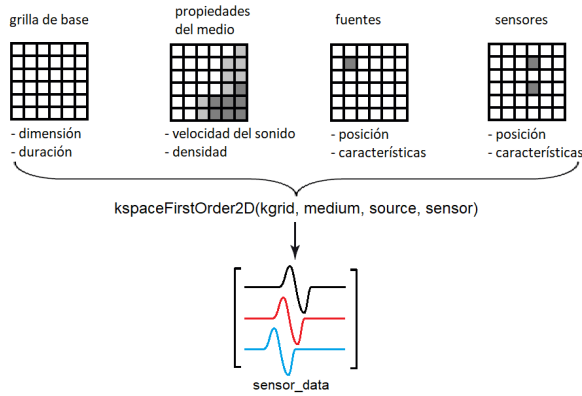


Figura 4: Esquema de uso de kWave

El último término podría interpretarse como la relación entre la velocidad de propagación y una cierta "velocidad numérica (dx/dt)" que relaciona el mínimo salto espacial con el mínimo salto temporal. Si se utiliza un $CFL=0.5$, por ejemplo, en un salto temporal $t=2\cdot dt$ la onda avanza una distancia $x=dx$. En términos prácticos, implica que con planos paralelos adyacentes (separados por el mínimo de resolución dx) se requiere un retardo de $2\cdot dt$ para obtener la señal de cancelación de Miller en forma exacta en la representación numérica. El Código 1 implementa una versión simple de un plano de Miller. La mayor complicación del código se refiere a definir para cada fuente una señal temporal diferente en el orden que Matlab asigna a los puntos de la matriz de fuentes.

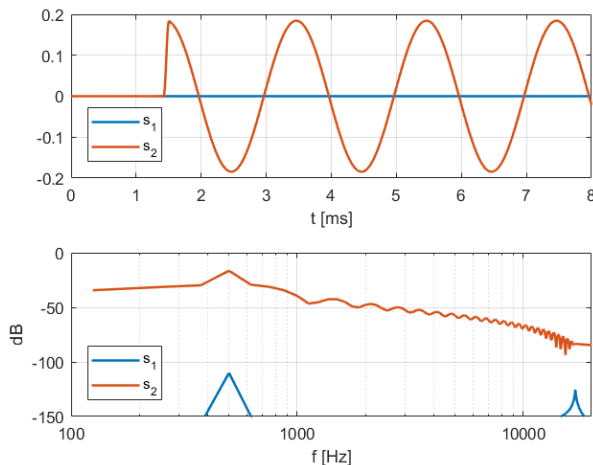


Figura 5: Registro temporal de señal en los sensores y su espectro

Los resultados quedan registrados en la variable *sensor_data* que es una matriz conteniendo en cada fila los registros temporales de los sensores. Al ejecutar la función *kspaceFirstOrder2D()* se

pueden ver en forma animada los resultados de la simulación. La captura de un instante de tiempo se muestra en la Figura 3. En la simulación se ubicó un sensor a cada lado del plano de Miller. La Figura 5 presenta los resultados de la señal temporal registrada por ambos sensores. En el semiespacio de la izquierda (s_1) se espera que la señal sea nula. Puede notarse una diferencia de unos 100 dB entre ambas señales.

Código 1: Fuente plana de Miller con PSTD

```
% Parámetros generales
Nx=256; Ny=512; dx=1e-2;
kgrid = kWaveGrid(Nx,dx,Ny,dx);
dxMiller=1; dtMiller=2; posMiller=200;
medium.sound_speed=340;
medium.density=1.2;
CFL=0.5;

% Definición del tiempo de simulación
t_final = 8e-3;
kgrid.t_array=makeTime(kgrid, ...
    medium.sound_speed,CFL,t_final);
t=kgrid.t_array; dt=kgrid.dt;

% Ubicación de las fuentes
source.p_mask=zeros(Nx,Ny);
source.p_mask(:,posMiller)=1;
source.p_mask(:,posMiller-dxMiller)=1;

% Señales temporales de las fuentes
y1=sin(2*pi*500*t);
y2=-sin(2*pi*500*(t-dtMiller*dt));
y2(1:dtMiller)=0;
cantFuentes=Nx;
source.p=zeros(Nx,length(t));
source.p(1:Nx,:)=ones(Nx,1)*y2;
source.p(Nx+1:2*Nx,:)=ones(Nx,1)*y1;

% Ubicación de sensores
sensor.mask=zeros(Nx,Ny);
sensor.mask(Nx/2,posMiller-50)=1;
sensor.mask(Nx/2,posMiller+50)=1;

% Simulación
sensor_data=kspaceFirstOrder2D(kgrid, ...
    ,medium,source,sensor,'PMLSize',0);
```

3.3 Limitaciones del método

Estos resultados se pueden obtener con un tiempo de simulación que se limite al tiempo que tardan las ondas en alcanzar los límites laterales del espacio de simulación. El método PSTD opera con la transformada de Fourier para descomponer las señales en el espacio, lo que da por resultado que la solución en cada instante tiene periodicidad espacial. Una onda que se propaga más allá del extremo derecho reaparece por el extremo izquierdo. La solución estándar a este problema consiste en aplicar en todo el



contorno una capa de absorción conocida como PML [11, 12] que atenúa la onda que continuaría propagándose luego de salir de la escena, minimizando además las reflexiones internas. Esto podría considerarse el equivalente digital de un espacio anecoico. Una capa de PML de unos 20 puntos en la implementación de kWave da lugar a coeficientes de reflexión y de transmisión de -100 dB y -80 dB, respectivamente [13]. Ahora bien, cuando se incorpora esta capa de PML ya no es posible generar una onda plana en sentido estricto. El plano adquiere dimensión finita y por lo tanto presenta difracción. Aún cuando el plano de fuentes se especifique cubriendo todo el espacio (insertándose en la capa de PML), el comportamiento general del sistema muestra efectos de difracción.

Para poner esto a prueba se repitió la simulación previa, incorporando una capa de PML de 20 cm en los bordes. Puede observarse en la Figura 6 que la señal registrada de ondas retrógradas es prácticamente nula hasta el lugar indicado por una flecha (poco menos de 4 ms). Este retardo es exactamente el que corresponde al tiempo de propagación para recorrer la distancia entre los bordes del plano que tocan la capa del PML y el sensor s_1 . Significa que la señal deja de ser nula cuando recibe el efecto de las ondas difractadas en el extremo del plano.

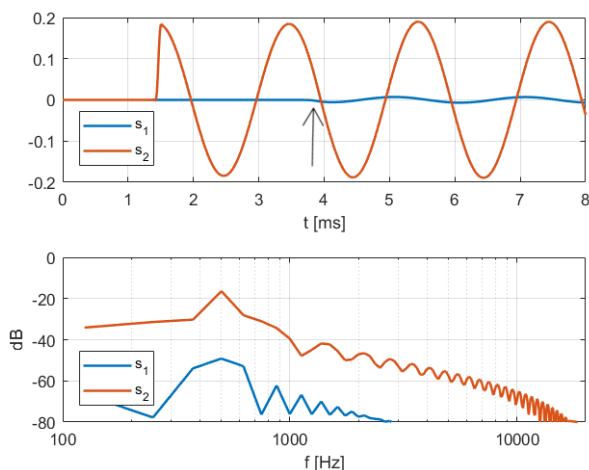


Figura 6: Registro temporal de señal en los sensores y su espectro con PML

La fuente de Miller (sin PML) genera en s_1 un nivel 100 dB menor que en s_2 , pero si se considera la relación entre las ondas registradas por los sensores cuando se produce difracción dicha

atenuación se aproxima a los 30 dB. Es una disminución aceptable para resultados visuales en la animación gráfica de la simulación, pero se pierden las condiciones prácticamente ideales del caso anterior.

3.4 Arreglos de fase (*phased arrays*)

La propuesta de Miller requiere que la superficie se corresponda con un frente de ondas. Esto significa que todos sus elementos deben tener la misma fase. Sin embargo, es posible obtener resultados razonables con arreglos de fuentes de Miller en los que la fase varíe entre elementos. La Figura 7 muestra un instante de la simulación generada con variación lineal de fase entre elementos de la fuente de Miller (sin PML).

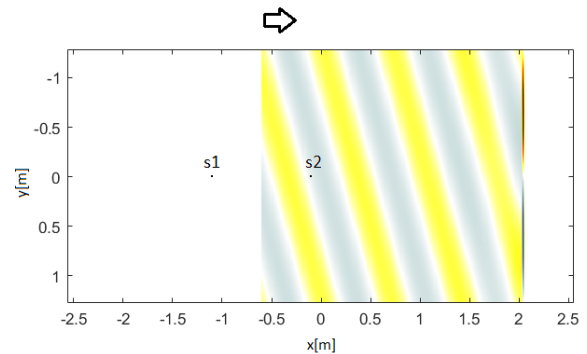


Figura 7: Simulación de arreglo de fases lineales

Se observa un incremento de los valores de presión en el comienzo de la propagación (marcas oscuras a la derecha de la Figura 7). Este efecto puede atenuarse si se utilizan señales que provoquen ondas con inicio suave (*fade in*). En la Figura 8 se muestran los registros en ambos sensores.

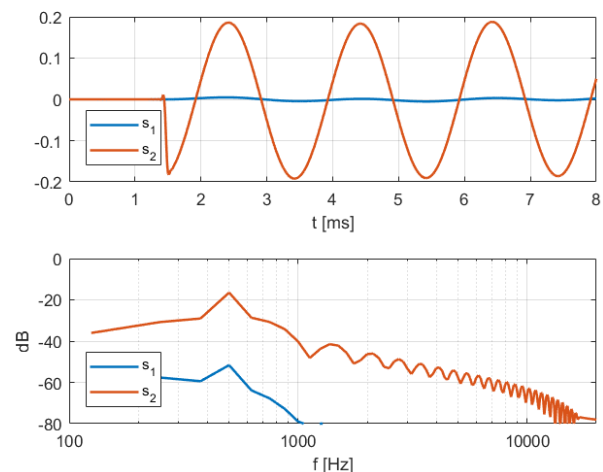


Figura 8: Registros utilizando un *phased array*

En este caso la incorporación de una capa de PML no afecta de forma significativa los resultados. En la Figura 9 se muestran los registros obtenidos al simular la misma situación anterior agregando una capa de PML de 20 cm.

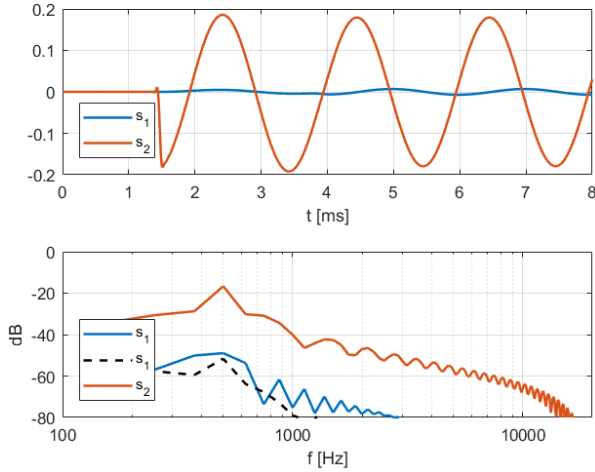


Figura 9: Registros de *phased array* con PML. El trazo de s_1 con línea de puntos corresponde al registro sin PML

4. RADIACIÓN DE UN DIFUSOR

Una fuente de Miller adyacente a la superficie de un difusor permite observar la simulación temporal del patrón generado. Este patrón resulta muy útil en situaciones de enseñanza para comparar el desarrollo temporal de los patrones generados para distintas frecuencias y distinto tipo de difusores. En la Figura 10 se observa un instante de la simulación utilizando un difusor QRD de orden 5. Para definir una superficie perfectamente reflectante se impuso la condición de velocidad nula en todos los puntos correspondientes al difusor, utilizando fuentes de velocidad en modo dirichlet. Se incorporó además un arreglo de sensores en semicírculo para poder graficar el diagrama polar generado, que se muestra en la Figura 11. Es importante tener presente que este patrón es difícil de observar en otras situaciones si se utilizan fuentes planas tradicionales ya que el patrón emitido de la fuente queda superpuesto con el generado por el difusor. Existe la opción de utilizar una salva (*burst*) de pocos ciclos, pero eso requiere colocar la fuente alejada del difusor y utilizar un tiempo de simulación mucho más extenso para completar el recorrido de la onda incidente antes de poder obtener el reflejado por el difusor.

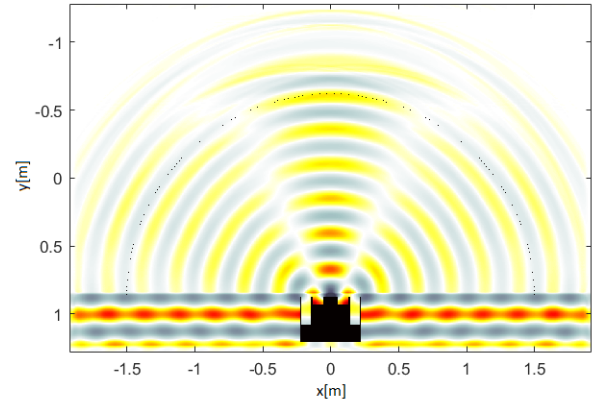


Figura 10: Una fuente de Miller emite ondas planas hacia abajo justo sobre la superficie de un difusor QRD

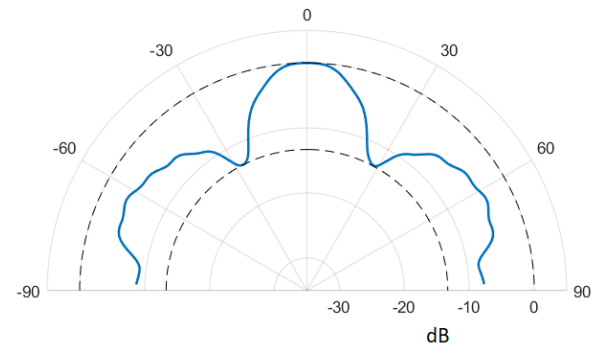


Figura 11: Diagrama polar registrado por el arreglo semicircular de sensores

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Distintas versiones del principio de Huygens suelen aplicarse para conseguir patrones de radiación particulares, como en los trabajos de síntesis de campos de ondas (Wave Field Synthesis) [14]. En ciertas aplicaciones puede resultar conveniente tener en cuenta esta variante propuesta por Miller que permite atenuar la generación de ondas retropropagadas. El toolbox kWave, que implementa el método PSTD, resulta adecuado para realizar el tipo de simulaciones propuesto en este trabajo. Es particularmente prometedor que permita utilizar en forma simultánea fuentes de presión y velocidad, incluso superpuestas en los mismos puntos. Curiosamente aún son pocos los grupos de investigación relacionados con la acústica que utilizan el PSTD para realizar simulaciones de tipo ondulatorio en el dominio del tiempo [15, 16], aunque es ampliamente utilizado en otras áreas [17, 17–19]. En los últimos años se verifica un esfuerzo de varios grupos de investigación para encontrar modos eficientes de establecer condiciones de borde arbitrarias en



las simulaciones PSTD. Como trabajo futuro se pretende explorar variantes que desarrollen simulaciones aplicando el teorema integral de Kirchhoff, aprovechando estas características de utilización simultánea de ambos tipos de fuentes. Esto podría permitir explorar configuraciones más generales, superando la limitación de exactitud de la solución al utilizar superficies que no necesiten corresponderse con un frente de ondas.

6. AGRADECIMIENTOS

Esta investigación es parte del proyecto de investigación: "Desarrollo de software de simulaciones acústicas utilizando el método pseudo espectral en el dominio del tiempo" de la Universidad Nacional de Lanús.

Agradecemos al Dr. Ernesto Accolti del INAUT (CONICET - UNSJ) por los fructíferos intercambios en relación con la utilización del método pseudo espectral del espacio k.

REFERENCIAS

- [1] Feynman, Richard Phillips. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, págs. 367–387, 1948.
- [2] Hecht, Eugene. *Optics*. Pearson Education Limited, 2017.
- [3] Kirchhoff, G. Zur theorie der lichtstrahlen. *Ann. d. physik*, 18:663, 1883.
- [4] Born, Max. Emil wolf principles of optics. *Electromagnetic Theory of Propagation, Interference*, págs. 111–119, 1980.
- [5] Enders, Peter. Huygens' principle and the modelling of propagation. *European Journal of Physics*, 17(4): 226, 1996.
- [6] Miller, David AB. Huygens's wave propagation principle corrected. *Optics letters*, 16(18):1370–1372, 1991.
- [7] Anderson, Forrest L. Huygens' principle geometric derivation and elimination of the wake and backward wave. *Scientific reports*, 11(1):1–13, 2021.
- [8] Igel, Heiner. *Computational seismology: a practical introduction*. Oxford University Press, 2017.
- [9] Robertson, James L; Cox, Ben T e Treeby, Bradley E. Quantifying numerical errors in the simulation of transcranial ultrasound using pseudospectral methods. Em *2014 IEEE International Ultrasonics Symposium*, págs. 2000–2003. IEEE, 2014.
- [10] Treeby, Bradley E e Cox, Benjamin T. k-wave: Matlab toolbox for the simulation and reconstruction of photoacoustic wave fields. *Journal of biomedical optics*, 15(2):021314, 2010.
- [11] Huang, WP; Xu, CL; Lui, W e Yokoyama, K. The perfectly matched layer (pml) boundary condition for the beam propagation method. *IEEE Photonics Technology Letters*, 8(5):649–651, 1996.
- [12] Liu, Qing-Huo e Tao, Jianping. The perfectly matched layer for acoustic waves in absorptive media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 102(4):2072–2082, 1997.
- [13] Treeby, Bradley; Cox, Ben e Jaros, Jiri. k-wave a matlab toolbox for the time domain simulation of acoustic wave fields user manual. *Manual Version 1.0.1*, 2012.
- [14] Hänslér, Eberhard e Schmidt, Gerhard, editores. *Wave Field Synthesis Techniques for Spatial Sound Reproduction*, págs. 517–545. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2006. ISBN 978-3-540-33213-8. doi:10.1007/3-540-33213-8_13. Disponible en: https://doi.org/10.1007/3-540-33213-8_13.
- [15] Cosnefroy, Matthias e Hornikx, Maarten. Hybrid fourier pseudospectral/discontinuous galerkin time-domain method for urban sound propagation in a moving atmosphere. Em *Proceedings of Euronoise 2021*. 2021.
- [16] Spa, Carlos; Rivas, Ricardo e Pérez, Luis. Impedance boundary conditions for a time-domain finite-point method. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 40(6):1–10, 2018.
- [17] Wise, Elliott S; Jaros, Jiri; Cox, Ben T e Treeby, Bradley E. Pseudospectral time-domain (pstd) methods for the wave equation: Realizing boundary conditions with discrete sine and cosine transforms. *Journal of Theoretical and Computational Acoustics*, 29(04):2050021, 2021.
- [18] Chen, Hanming; Zhou, Hui e Rao, Ying. Constant-q wave propagation and compensation by pseudo-spectral time-domain methods. *Computers & Geosciences*, 155:104861, 2021.
- [19] Lei, Yang; Haynes, Mark S; Arumugam, Darmindra e Elachi, Charles. A 2-d pseudospectral time-domain (pstd) simulator for large-scale electromagnetic scattering and radar sounding applications. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 58(6):4076–4098, 2020.